مدلِ مثلث خیام در بازی پین‌بال

مریم شاه‌محمدی
مدرس ریاضی شهر تهران

اشاره

امروزه، مدل‌های ریاضی و فرایند مدل‌سازی ریاضی، به‌عنوان یک نوآوری و روش خلاق در امر یاددهی و یادگیری مطرح است. از دیدگاه آموزشی، ارائه‌های فعال و مدل‌های پویا، چالشی بزرگ محسوب می‌شوند. بنابراین موضوع مطالعات متعددی هستند که تأثیر مثبت در یادگیری مفاهیم ریاضی را تأیید و به‌طور خاص، ارتباط مفاهیم ریاضی با زندگی واقعی را تثبیت می‌کنند. در عصر حاضر که شاهد رشد لحظه به لحظهٔ فناوری‌های الکترونیکی هستیم و بازی‌های رایانه‌ای به مصداق یکی از جذاب‌ترین محصولات این عصر، مدت زمان طولانی از اوقات فراغت افراد را به خود مشغول ساخته است، رسالت آموزش‌های غیررسمی در جهت واکاوی اصول ریاضی حاکم بر این‌گونه بازی‌ها و ضمنی‌سازی یادگیری در قالب تفریح و سرگرمی بیش از پیش آشکار شده است. هدف از نگارش مقالهٔ حاضر بیان یک نمونهٔ ساده از مدل‌سازی قوانین ریاضی در آموزش‌های مدرسه‌ای است. لذا روند یک بازی رایانه‌ای (بازی پین‌بال) با یک مدل پایه، بیان شده، و چگونگی ارتباط آن با قانونمندی‌های ریاضی، نظیر الگوها و مثلث خیام، مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: مدل، الگوهای ریاضی، مثلث خیام، بازی رایانه‌ای، پین‌بال

مقدمه

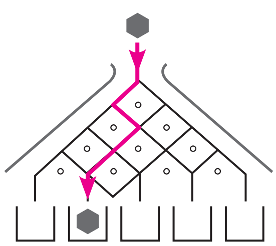
بی‌شک طرف‌داران بازی‌های اندرویدی یا حتی رایانه‌ای به این موضوع واقف‌اند که بازی پین‌بال -- یکی از پرطرف‌دارترین بازی‌های روز دنیا به‌شمار می‌رود. پین‌بال بازی سرگرم‌کننده و جذابی برای رایانه و تبلت است و با مراحل مهیج خود می‌تواند ساعت‌ها اوقات فراغت کاربران را پر کند. در این بازی، کاربر باید مراقب توپ خود باشد و آن را به قسمت‌های متفاوت به گونه‌ای پرتاب کند که از سطح بازی خارج نشود. همچنین باید تلاش خود را به‌کار گیرد تا توپ از دور خارج نشود و بتواند امتیاز بیشتری کسب کند (شکل ۱).

شکل ۱. نمایش بازی رایانه‌ای پین‌بال

یک مدل پایه

مدلی که در شکل ۲ نشان داده شده، نمونهٔ ساده‌ای از ماشین پین‌بال است که به سادگی و با داشتن یک تختهٔ چوبی، یک مهره یا تیلهٔ شیشه‌ای، ۱۰ عدد گل‌میخ و ۵ عدد جام، می‌توان آن را تشکیل داد. گل میخ‌ها به ترتیب یک الگوی مثلثی در تخته قرار داده شده‌اند. یک گل‌میخ در بالاترین سطر، دو گل میخ در سطر دوم و سه تا در سطر سوم و به‌همین ترتیب ... و فضای کافی برای اینکه تیله بتواند بین آن‌ها حرکت کند.

برای شروع، تخته را به اندازهٔ زاویه کوچکی به حالت شیب‌دار نگه می‌داریم و تیله را رها می‌کنیم، به طوری که به بالای اولین گل میخ اصابت کند و وسط بایستد.



شکل ۲. مدل‌سازی پایه برای پین‌بال

تیله برای انحراف به چپ یا راست گل میخ اول، شانس‌های برابر خواهد داشـــت و بازی با انحراف تیله به سمت راست یا چپ در سطر دوم و سطرهای بعدی ادامه می‌یابد، تا اینکه نهایتاً به یکی از جام‌های انتهایی هدایت شود. برای اینکه شانس حرکت مهره به سمت چپ و راست در مراحل بازی یکسان باشد، گاهی لازم خواهد شد که تخته را کمی منحرف کنیم. بدین ترتیب با حرکت کردن تیله بین یک پین در هر یک از چهار ردیف پین‌ها، یک مسیر تصادفی طی خواهد شد. تمامی مسیرهای متفاوت و ممکن با خط‌های خاکستری و یک مسیر جزئی و خاص به وسیلهٔ خط قرمز نشان داده شده است (شکل ۲).

در مدل حاضر، مســـیر مشـــخص شـــده را با علامت «LRLL» توصیف می‌کنیـــم. به این معنی که تیله از ســـمت چپ اولین پین منحرف شـــده و در جهت راست، حول پین سطر دوم حرکت کرده و سمت چپ پین‌های سطر سوم و چهارم مسیر خود را ادامه داده است.

مسئلهٔ ۱. چه تعداد مسیر متفاوت به‌وسیلهٔ این ماشین پین‌بال قابل نمایش و طی کردن است؟

پاســـخ: اگر تمام حالت‌های ممکن با روش فوق علامت‌گذاری شود، پاسخ سؤال که ۱۶ مسیر مختلف است، مشخص خواهد شد:
«LLLL» و «LLLR» و «LLRL» و «LRLL» و «RLLL» و «LLRR» و «LRRL» و «RRLL» و «RLLR» و «RLRL» و «LRLR» و «LRRR» و «RRRL» و «RRLR» و «RLRR» و «RRRR».

مسئلهٔ ۲. تعداد مسیرهایی که در انتها به یک جام منتهی می‌شوند، کدام است؟

پاسخ: برای پاسخ‌گویی به این سؤال کافی است فهرست مرتب شـــدهٔ زیر، براساس اینکه هر مسیر شـــامل چه تعداد تغییر جهت به سمت راست است، در نظر گرفته شود:

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۰
(تیله به چپ‌ترین جام هدایت خواهد شـــد و تنها یک مسیر وجود خواهد داشت.)

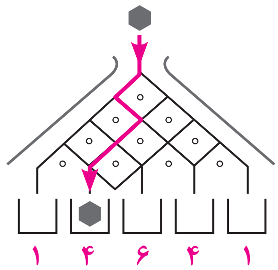
تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۱
(تیله به دومین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۲
(تیله به سومین جام هدایت خواهد شد شش مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۳
(تیله به چهارمین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

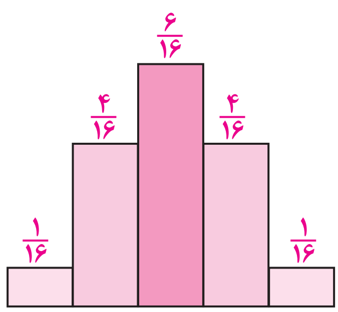
تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۴
(تیله به راســـت‌ترین جام هدایت خواهد شـــد و یک مســـیر وجود خواهد داشت.)

این نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. تعداد مسیرهای منتهی به هر جام

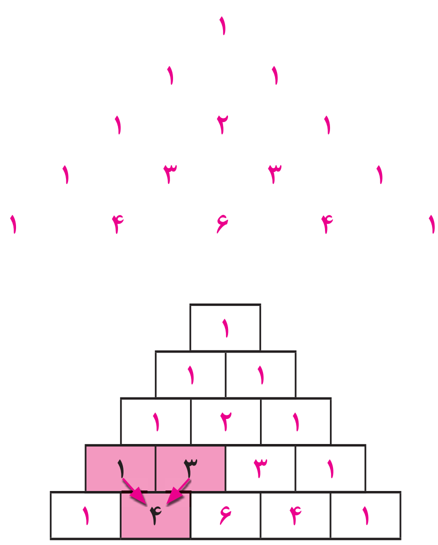
بدین ترتیب می‌توان در هر حالت، احتمال هدایت‌شـــدن تیله به هر یک از جام‌ها را نیز محاسبه کرد که در مدل مذکور، نمودار توزیع احتمال نرمال است (شکل ۴).



شکل ۴. نمایش توزیع احتمال در مدل

مثلث خیام

مثلث خیام مثلثی عددی اســـت که مانند بسیاری از جدول‌های عددی دیگر پیشینهٔ کهنی دارد (شکل ۵). قبل از هر چیز باید در نظر داشـــت که مثلث خیام به‌طور پیوسته ادامه می‌یابد و در مدل پایه‌ای مذکور، فقط پنج سطر اول آن نشان داده شده است.



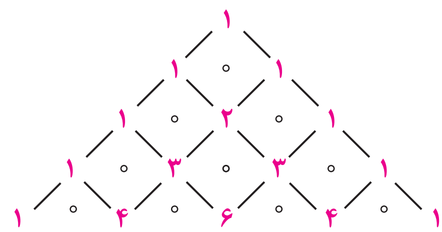
شکل ۵. نمایش مثلث خیام

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مثلث خیام، در هر سطر، عدد ابتدا و انتها برابر یک اســـت و اعداد میانی از مجموع دو عدد راست و چپ آن در سطر قبل به‌دست می‌آیند.

ارتباط مدل پین‌بال و مثلث خیام

اگر مثلث خیام و ماشین پین‌بال (مدل) با یکدیگر مورد بررسی قرار گیرند، ارتباط بین آن‌ها به سادگی مشخص می‌شود. در واقع هر عدد در مثلث خیام نشان‌دهندهٔ تعداد مسیرهای متمایزی است که می‌توان تیله را به همان نقطه در ماشین پین‌بال هدایت کرد (شکل۶).

باید توجه داشـــت که مسیر تیله در بازی، همواره رو به پایین در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶. ارتباط اعداد مثلث خیام پاسکال و مدل پین‌بال

از طرف دیگر، عددهای مثلث خیام (شکل ۷) را با استفاده از تابع ترکیب و آنالیز ترکیبی نیز می‌توان به‌دست آورد که فرمول این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شـــود و تعداد انتخاب‌های m شیء از n شیء متمایز است:

$$ {}_nC_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (۱)$$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

$\Downarrow$

${}_{۰}C_{۰}$

${}_{۱}C_{۰}$ ${}_{۱}C_{۱}$

${}_{۲}C_{۰}$ ${}_{۲}C_{۱}$ ${}_{۲}C_{۲}$

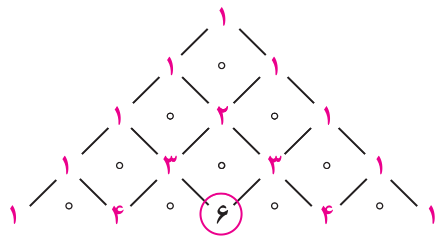
${}_{۳}C_{۰}$ ${}_{۳}C_{۱}$ ${}_{۳}C_{۲}$ ${}_{۳}C_{۳}$

${}_{۴}C_{۰}$ ${}_{۴}C_{۱}$ ${}_{۴}C_{۲}$ ${}_{۴}C_{۳}$ ${}_{۴}C_{۴}$

شکل ۷. نمایش اعداد مثلث خیام پاسکال با استفاده از ترکیب

در مدل مطرح شده از بازی پین‌بال، هر یک از مقادیر ممکن تابع ترکیب نیز قابل نمایش است. به عنوان نمونه، تعداد مسیرهای ممکن برای هدایت تیله در بازی پین‌بال به‌طوری که از چهار سطر بگذرد و دو تغییر جهت به سمت راست داشته باشد، برابر ۶ است.

$$ {}_{۴}C_{۲} = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!(۴-۲)!} = ۶ \qquad (۲)$$



$\Downarrow$

${}_{۰}C_{۰}$

${}_{۱}C_{۰}$ ${}_{۱}C_{۱}$

${}_{۲}C_{۰}$ ${}_{۲}C_{۱}$ ${}_{۲}C_{۲}$

${}_{۳}C_{۰}$ ${}_{۳}C_{۱}$ ${}_{۳}C_{۲}$ ${}_{۳}C_{۳}$

${}_{۴}C_{۰}$ ${}_{۴}C_{۱}$ ${}_{۴}C_{۲}$ ${}_{۴}C_{۳}$ ${}_{۴}C_{۴}$

شکل ۸. ارتباط عددهای مثلث خیام تابع ترکیب و مدل پین‌بال

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مـــدل ارائه شـــده یـــک مـــدل ســـاده از نمایش اعـــداد مثلث خیـــام اســـت که بـــه راحتی قابـــل تعمیـــم دادن از یـــک مرحله بـــه مرحلهٔ بعدی اســـت. الگـــوی مثلثـــی چیدمان پیـــن (گره)ها و ساختار شبکه‌ای مدل به گونه‌ای است که هم در آموزش مدرسه‌ای می‌توان از آن استفاده کرد و هم در برنامه‌نویسی‌های پیشرفتهٔ رایانه‌ای قابل تنظیم و طراحی است. بی‌شک، نمایش و آنالیز مدل‌های ریاضی از این دست، در تفهیم مفاهیم اولیه و پایه نقش بسزایی خواهد داشت و آموزش ریاضی را از حالت انتزاعی به سمت پویایی سوق خواهد داد.

***منابع**

1. Hopkins, J., Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea, New Ed edition, 2002.
2. Colledge, T., Pascal's Triangle: A Teacher's Guide with Blackline Masters, Tarquin Publications UK, 1997., pp. 40.
3. D. Seymour, visual patterns in pascal's triangle, Dale Seymour publications, Palo Alto, CA, 1986.
4. www.math centre.ac.uk, Pascal's triangle and the binomial theorem, mc-ty-pascal-2009.